Lec 19

$\boxed{5}$ the map $w = \cosh z$

$$w = \cosh(x+iy) = \cosh x \cos y + i \sinh x \sin y$$

$$u = \cosh x \cos y$$

$$v = \sinh x \sin y$$

— مطلوب إيجاد معادلات تحتوى u, v, x ومعادلة تحتوى على u, v, i .

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$$
$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

$$\frac{u^2}{\cosh^2 x} + \frac{v^2}{\sinh^2 x} = 1$$

$$\frac{u^2}{\cos^2 x} - \frac{v^2}{\sin^2 y} = 1$$

$\boxed{6}$ the map $w = \sin z$ ~~w = sin(x+iy)~~

$$w = \sin(x+iy) = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y$$

$$u = \sin x \cosh y$$

$$v = \cos x \sinh y$$

$$\frac{u^2}{\cosh^2 y} + \frac{v^2}{\sinh^2 y} = 1$$

قطع ناقص

$$\frac{u^2}{\sin^2 x} - \frac{v^2}{\cos^2 x} = 1$$

قطع زائد

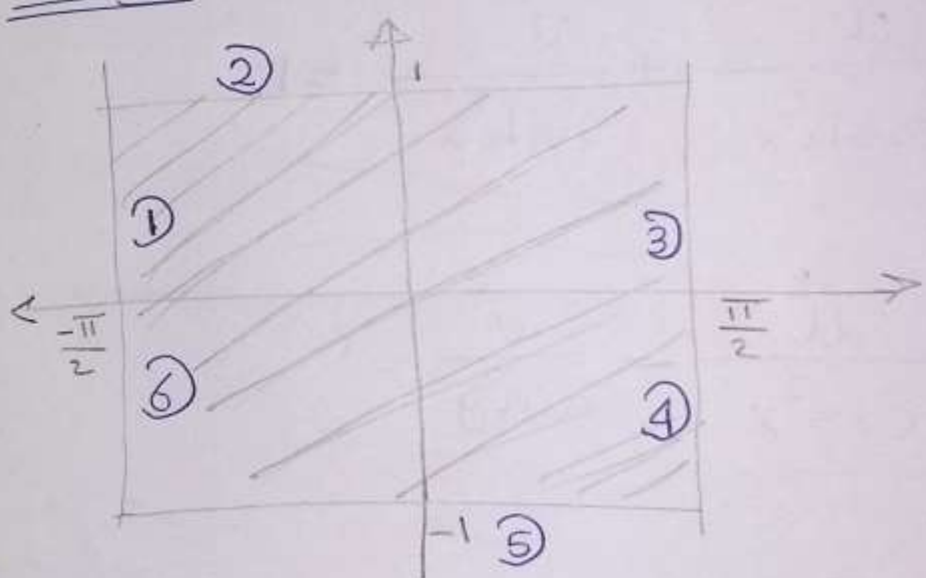
$\boxed{\text{Ex}}$ conform the region $\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$

$-1 \le y \le 1$ by the map $w = \sin z$

الحل

$$\frac{u^2}{\cosh^2 y} + \frac{v^2}{\sinh^2 y} = 1$$

$$\frac{u^2}{\sin^2 x} - \frac{v^2}{\cos^2 x} = 1$$



$u = \sin x \cosh y$

$v = \cos x \sinh y$

$\boxed{2}$ Lec 19

$$\text{at } x = \frac{-\pi}{2} \qquad u = -\cosh y \ , \ v = 0$$

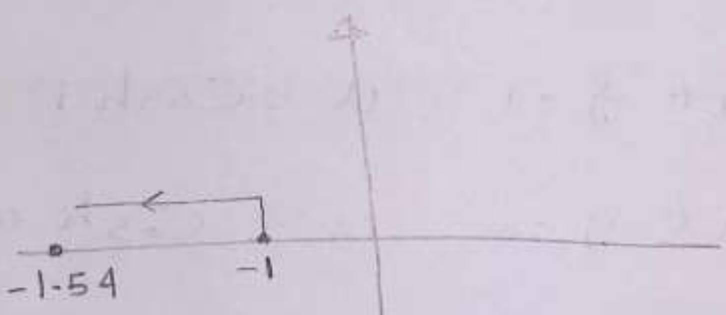
← إذا كانت النقطة عند التعويض في الصور القياسية تعطي (∞) نعوض في u, v .

← لأن $x = \frac{-\pi}{2}$ تعطي مشكلة في التعويض في الوضعيات السابقة والـ (cosh) دالة تأكل الإشارة لابد من خط الجزء الموجب لوحده والجزء السالب لوحده.

$$0 \leq y \leq 1$$

$$y = 0 \Rightarrow u = -\cosh 0 = -1$$

$$y = 1 \Rightarrow u = \cosh 1 = -1.54$$

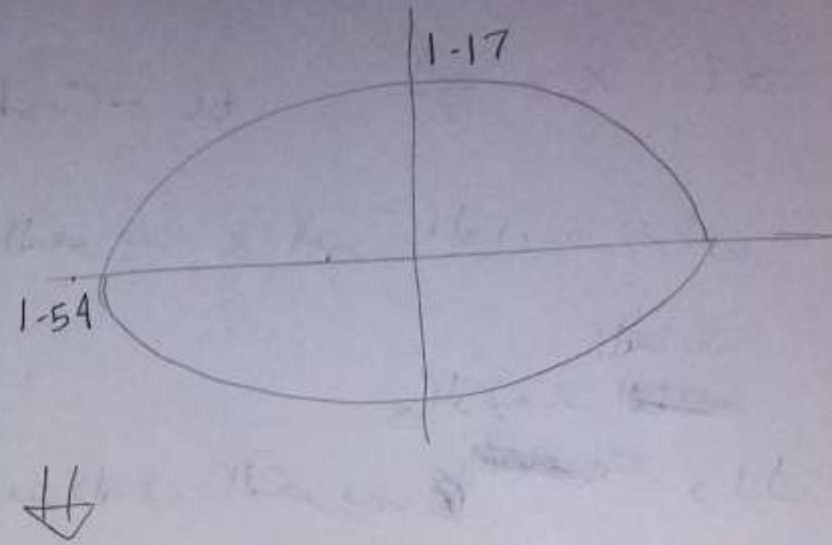


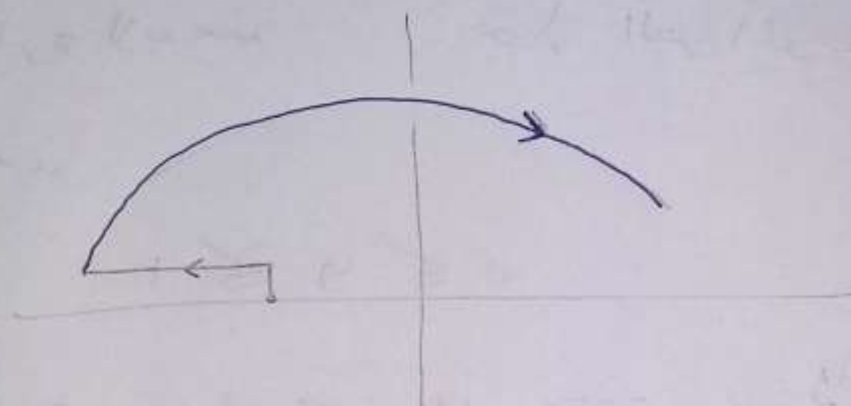
$$\text{at } y = 1$$

$$\frac{u^2}{\cosh^2(1)} + \frac{v^2}{\sinh^2(1)} = 1$$

$$\frac{u^2}{(1.54)^2} + \frac{v^2}{(1.17)^2} = 1$$

← أول الرسمة الثانية هي
نهاية الرسمة الأولى.

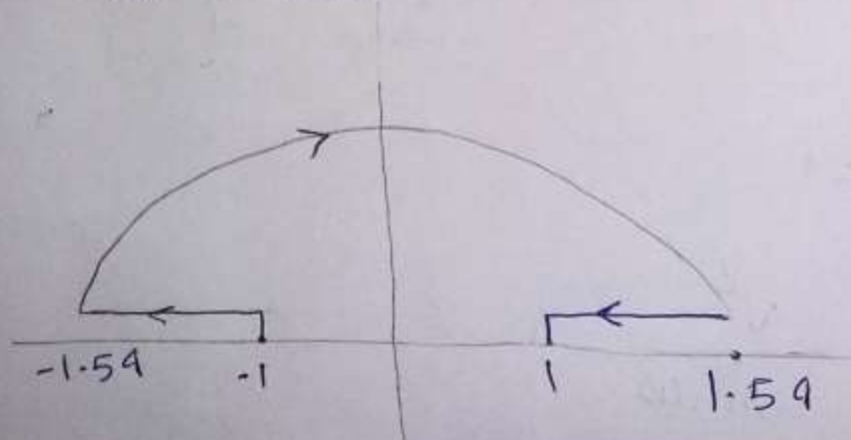




at. $x=\frac{\pi}{2}$ $\quad u=\cosh y$, $v=0$ $\quad 1 \xrightarrow{y} 0$

at $y=1$ $\quad u=\cosh 1 = 1.54$

at $y=0$ $\quad u=\cosh 0 = 1$

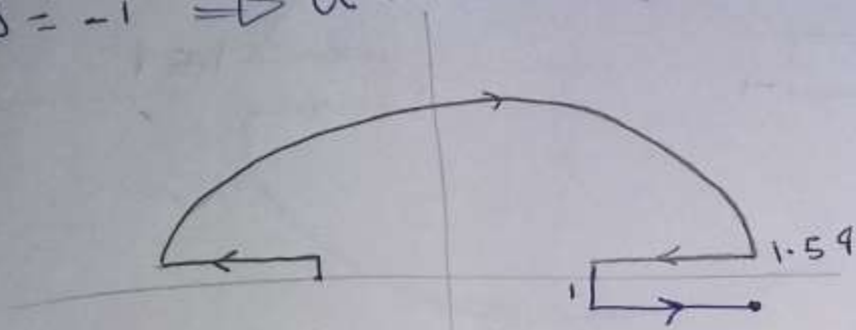


at $x = \frac{\pi}{2}$; $\quad 0 \xrightarrow{y} 1$

$u = \cosh y$, $v = 0$

at $y = 0 \Rightarrow u = \cosh(0) = 1$

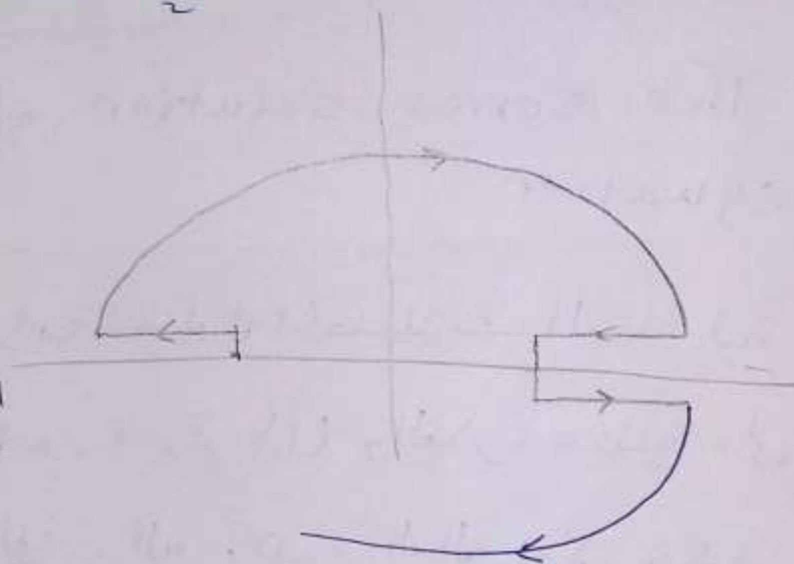
at $y = -1 \Rightarrow u = \cosh(-1) = 1.54$



at $y = -1$ $\quad \frac{\pi}{2} \xrightarrow{x} -\frac{\pi}{2}$

$$\frac{u^2}{\cosh^2(-1)} + \frac{v^2}{\sinh^2(-1)} = 1$$

$$\frac{u^2}{(1.54)^2} + \frac{v^2}{(1.17)^2} = 1$$



---

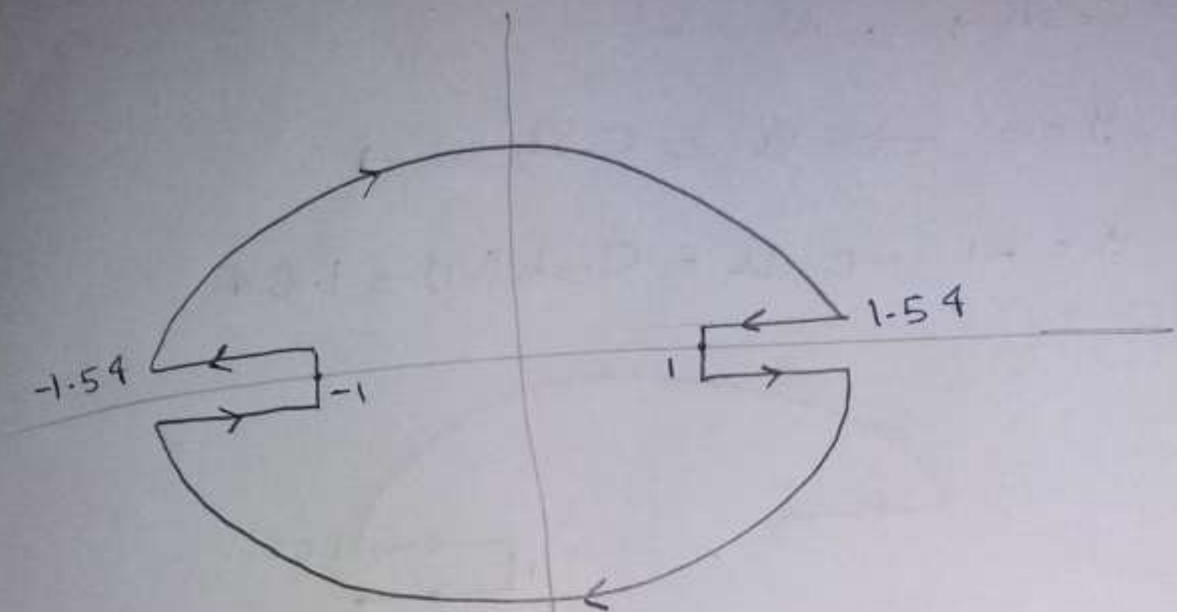
at $x = \frac{-\pi}{2}$ $\quad -1 \xrightarrow{y} 0$

$u = -\cosh y$, $v = 0$

$y = -1 \Rightarrow u = -1.54$

$y = 0 \Rightarrow u = -1$

→ the map conform the region to



---

* The series solution of ordinary differential equation

← في هذا الجزء نهتم بدراسة حلول المعادلات التفاضلية
من الرتبة الثانية على الصورة رقم (١) والفكرة مبنية على
أن أي معادلة يكون حلها دالة . هذه الدالة يمكن فكها
بمفكوك " taylor " إذا عكست طريقة التفكير فإننا
يمكن أن نفرض مفكوك يشبه مفكوك " taylor "
و نفرض أنه حل المعادلة .
← من شكل المعادلة يمكن إستنتاج المفكوك .

$$y'' + P(x)\, y' + Q(x)\, y = f(x) \longrightarrow (1)$$

Some Notes

① **ordinary Point :-** (o-P)

x_0 is called ordinary point if

$$P(x_0) \neq \infty \quad ; \quad Q(x_0) \neq \infty$$

② **singular Point :-** (S-P)

x_0 is called S.P

if $P(x_0) = \infty \quad ; \quad Q(x_0) = \infty$

③ **Regular singular Point** (R.S.P)

x_0 is R-S-P if

$$P(x)\Big|_{x=x_0} = \infty \quad ; \quad Q(x)\Big|_{x=x_0} = \infty$$

$$(x - x_0)\, P(x)\Big|_{x=x_0} \neq \infty$$

$$(x - x_0)^2\, Q(x)\Big|_{x=x_0} = \infty$$

ليست حفظا

type of Points x_0

(O.P)

$P(x_0) \neq \infty$

$Q(x_0) \neq \infty$

$y = \sum a_n (x - x_0)^n$

نفرض الحل

S.P

$P(x_0) = \infty$

or $Q(x_0) = \infty$

R.S.P

$(x - x_0) P(x) \Big|_{x = x_0} \neq \infty$

$(x - x_0)^2 Q(x) \Big|_{x = x_0} \neq \infty$

نفرض الحل

$y = \sum a_n (x - x_0)^{n+\lambda}$

irregular $\leftarrow$ **I.R.S.P**

$(x - x_0) P(x) \Big|_{x = x_0} = \infty$

or

$(x - x_0)^2 Q(x) \Big|_{x = x_0} = \infty$

ليس لها حل

EX find a series solution of

$y'' - x y' + 2y = 0$ at $x_0 = 0$

Sol

eqn $\rightarrow$ $y'' + P(x) y' + Q(x) y = f(x)$

$P(x) = -x \qquad Q(x) = 2$

$$P(0) = 0 \neq \infty \quad , \quad Q(0) = 2 \neq \infty$$

$x_0 = 0$ is o.p

$$y = \sum a_n (x-0)^n = \sum a_n x^n$$

$$y' = \sum n a_n x^n \quad ; \quad y'' = \sum n(n-1) a_n x^{n-2}$$

بالتعويض في

$$y'' - x y' + 2y = 0$$

$$\sum n(n-1) a_n x^{n-2} - \sum n a_n x^n + 2 \sum a_n x^n = 0$$

Coeff. of x^0

$$2(1) a_2 - 0 a_0 + 2 a_0 = 0 \Rightarrow \boxed{a_2 = -a_0} \rightarrow (1)$$

Coeff. of x^1

$$3(2) a_3 - (1) a_1 + 2 a_1 = 0$$

$$\boxed{a_3 = \frac{-a_1}{6}} \longrightarrow (2)$$

في كل المسائل نقارن
معامل أقل أس واللي بعده
و معامل الأس العام

Coeff x^n

$$(n+2)(n+2-1)\,a_{n+2} - n\,a_n + 2\,a_n = 0$$

نبدل كل $n \leftarrow (n+2)$

$$a_{n+2} = \frac{(n-2)}{(n+2)(n+1)}\,a_n$$

$* n = 2 \implies a_4 = 0$

$* n = 3 \implies a_5 = \dfrac{1}{(5)(4)}\,a_3 = \dfrac{-1}{120}\,.a_1$

$* n = 4 \implies a_6 = \dfrac{2}{(6)(5)}\,a_4 = 0$

← بالتعويض في الحل

$$y = \sum a_n x^n = a_0 x^0 + a_1 x^1 + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots$$

$$= a_0 + a_1 x - a_0 x^2 - a_1 x^3 + 0 - \frac{1}{120} a_1 x^5 + 0 + \cdots$$

$$= a_0(1 - x^2) + a_1\left(x - \frac{x^3}{6} - \frac{1}{120}x^5 + \cdots\right)$$

الأفكار

① النقطة المطلوب الحل عندها ليست ($x_\circ = 0$) وهي $x_\circ$

للتسهيل نضع $t = x - x_\circ$

فتتحول من

$y = \sum a_n (x - x_\circ)^n$ إلى $y = \sum a_n t^n$

$\boxed{Ex}$ $y'' + x y' + y = 0$ at $x = 1$

$y = \sum a_n (x-1)^n$ $\qquad t = x - 1 \Rightarrow x = t + 1$

$y''(t) + (t+1) y' + y = 0$ at $t = 0$

$y = \sum a_n t^n$

---

② إذا وجد شروط إبتدائية مع رأس المسألة مثل.

$(1-2x) y'' + y' = 0$; $\boxed{y(0) = 3 \ ; \ y'(0) = 0}$

← في آخر خطوة في المسألة نعوض بالشروط لمعرفة قيمة الثوابت وهي $a_\circ$ ، a_1.

---

③ إذا وجد كثيرة حدود في الطرف الأيمن مثل

$y'' + y = x^3 + 5x^2 + 1$

← أقارن المعاملات في الطرفين حتى تنتهي درجة كثيرة الحدود ثم نقارن معامل الحد العام.

④ إذا ظهر دالة مثلثية أو أسية لو غاريتمية في أي جزء من المسألة.

a) $y'' + 5y' + y = e^{x}$

b) $y'' + xy' + \sin x \, y = 0$

b) نفك ($\sin x$) بمفكوك (taylor) ونعوض بها في المعادلة ونقارن المعادلات.

مثال على رقم a

<u>solve</u>

$y'' + (x-1)y' = e^{x}$ at $x = 0$

<u>Sol</u>

$y = \sum a_n x^n \qquad y' = \sum n a_n x^{n-1}$

$y'' = \sum n(n-1) a_n x^{n-2}$

$$\sum n(n-1) a_n x^{n-2} + \sum n a_n x^{n} - \sum n a_n x^{n-1} = \sum \frac{1}{n!} x^{n}$$

$$= 1 + x + \frac{x^2}{2!} \cdots \frac{x^n}{n!}$$

<u>Coeff x^0</u>

$2(1)a_2 + 0 - (1)a_1 = 1$

$$\boxed{a_2 = \frac{1}{2}(1+a_1)}$$

Coeff. of x^1 put $n=3$

$$(3)(2)a_3 + (1)a_1 - 2a_2 = 1$$

$$a_3 = \frac{1}{6}\left[1 + 2a_2 - a_1\right]$$

$$= \frac{1}{6}\left[1 + 1 + a_1 - a_1\right] \qquad \boxed{a_3 = \frac{1}{3}}$$

Coeff. of x^n . Put $n \longrightarrow n+2$

$$(n+2)(n+1)a_{n+2} + n a_n - (n+1)a_{n+1} = \frac{1}{n!}$$

$\boxed{n=2}$

$$12a_4 + 2a_2 - 3a_3 = \frac{1}{2}$$

$$a_4 = \frac{1}{12}\left[\frac{1}{2} - 1 - a_1 + 1\right]$$ ~~بالتعويض~~

بالتعويض في الصورة

$$y = \sum a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^2 \cdots$$

نعوض بقيم الثوابت .